



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PALERMO



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Riconciliazione delle previsioni: questioni metodologiche e applicazioni

Daniele Girolimetto

Department of Statistical Sciences, University of Padova

🌐 danigiro.github.io

🔗 github.com/danigiro

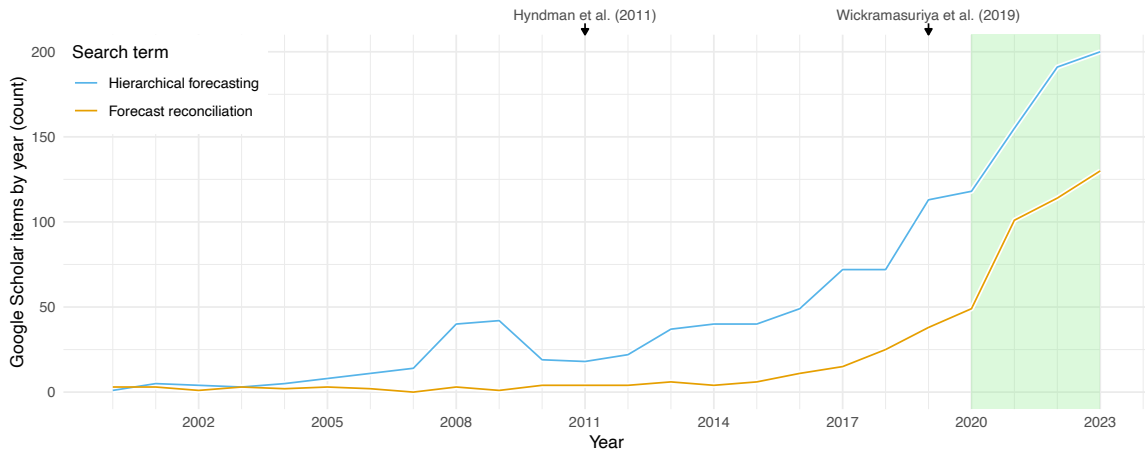
@ daniele.girolimetto@unipd.it

Palermo, IT – 27 Gennaio 2026

La sfida della previsione

- **Previsioni accurate** svolgono un ruolo fondamentale in vari campi, come **economia**, **business**, **politiche pubbliche** e **gestione ambientale**
 - Effettuare previsioni affidabili può influenzare significativamente il **processo decisionale**, l'**allocazione delle risorse** e la **pianificazione a lungo termine**. Tuttavia, **selezionare l'approccio previsionale più adatto** è un **compito complesso**
- Consideriamo una situazione in cui abbiamo **serie storiche multiple vincolate** invece di una sola. Queste serie possono essere correlate e potrebbero **condividere comportamenti o relazioni**
 - Possiamo fornire previsioni più accurate **sfruttando** queste relazioni?
- Utilizzare un **unico modello multivariato** per prevedere tutte le serie è spesso **computazionalmente costoso** e può essere **inefficiente** in termini di accuratezza previsionale
- Nell'ultimo decennio, la **riconciliazione delle previsioni** (Athanasopoulos *et al.*, 2024), ha dimostrato di ottenere previsioni più accurate utilizzando **informazioni tra serie** e relazioni comuni individuabili attraverso gli errori di previsione (Wickramasuriya *et al.*, 2019)

Più di 10 anni...

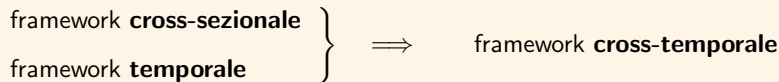


Argomento caldo nel dibattito degli ultimi anni sia in campo metodologico che applicativo: numerosi contributi a partire da [Hyndman et al. \(2011\)](#)

Previsione gerarchica e riconciliazione delle previsioni

Riconciliazione delle previsioni

Processo di post-previsione finalizzato a migliorare la qualità delle previsioni di base (comunque ottenute) di una serie storica multipla **vincolata linearmente** sfruttando vincoli cross-sezionali (es. spaziali) e/o temporali delle previsioni **target**



- Ricerca di approcci
 - **statisticamente fondati** (interpretazione, proprietà)
 - **fattibili**, per l'implementazione pratica
 - **efficaci**, in termini di qualità dei risultati in applicazioni reali
- Riconciliazione delle previsioni **puntuali** e **probabilistiche**
- Esempi di previsione: Vendite, Produzione, Turismo, Energia, Rischio, Dati macroeconomici, Sanità, Supply chain ...

La coerenza delle previsioni è importante!

- L'**incoerenza (aggregation inconsistency)** si verifica quando le previsioni per **diversi livelli e/o granularità temporali** sono generate da **modelli diversi** e utilizzando **set informativi diversi**
- **Framework in due fasi**: focus sulla revisione delle previsioni di base **incoerenti**, comunque ottenute, per ciascun nodo (variabile) di una **serie storica multipla vincolata linearmente** (es. gerarchica/raggruppata)
- **Evita** che diverse unità decisionali pianifichino su **visioni diverse del futuro**
- La **coerenza** supporta un processo decisionale allineato tra diverse unità di pianificazione e orizzonti temporali
 - ➔ Nelle gerarchie temporali (e **cross-temporali**), alcuni livelli di una gerarchia sono strettamente connessi con le decisioni supportate, altri invece no. Ma possono essere usati per arricchire le previsioni risultanti, attraverso il concetto di riconciliazione delle previsioni (Athanasopoulos and Kourentzes, 2022)

Riconciliazione delle previsioni: questioni metodologiche e applicazioni
Palermo, IT – 27 Gennaio 2027



Serie storiche vincolate

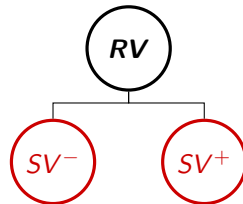
Volatilità Realizzata (RV)

Serie temporali finanziarie e previsione della volatilità (Caporin *et al.*, 2024): gestione del rischio, allocazione degli asset, copertura, pricing (determinare il prezzo giusto, cioè quello che massimizzerà le vendite e il margine)

Decomposizione Good e Bad:

$$RV_t = \sum_{i=1}^N r_{i,t}^2 = SV_t^- + SV_t^+$$

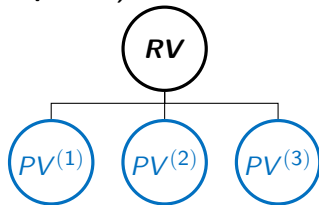
$$SV_t^+ = \underbrace{\sum_{i=1}^N r_{i,t}^2 I(r_{i,t} \geq 0)}_{\text{Good}} \quad SV_t^- = \underbrace{\sum_{i=1}^N r_{i,t}^2 I(r_{i,t} < 0)}_{\text{Bad}}$$



Decomposizione in Varianze Parziali (basate su quantili):

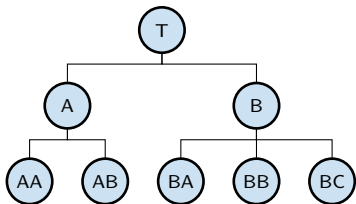
$$RV_t = \sum_{i=1}^N r_{i,t}^2 = \sum_{\ell=1}^L PV_t^{(\ell)}$$

$$PV_t^{(\ell)} = \sum_{i=1}^N r_{i,t}^2 I(q_1 < r_{i,t} \leq q_2)$$



Serie storica gerarchica

collezione di n variabili per le quali, in ogni istante temporale, valgono relazioni di aggregazione



Vincoli

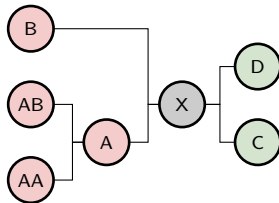
$$T = A + B$$

$$A = AA + AB$$

$$B = BA + BB + BC$$

Serie storica vincolata linearmente

caso generale



Vincoli

$$X = A + B$$

$$X = C + D$$

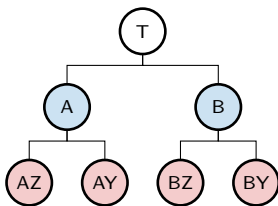
$$A = AA + AB$$

Serie storica raggruppata

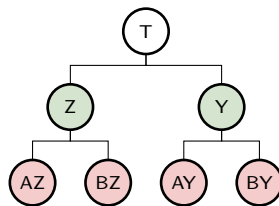
due o più gerarchie genuine che condividono le stesse variabili al livello superiore e inferiore

T	A	B
Z	AZ	BZ
Y	AY	BY

=



+



Vincoli

$$T = A + B$$

$$A = AZ + AY$$

$$B = BZ + BY$$

$$T = Z + Y$$

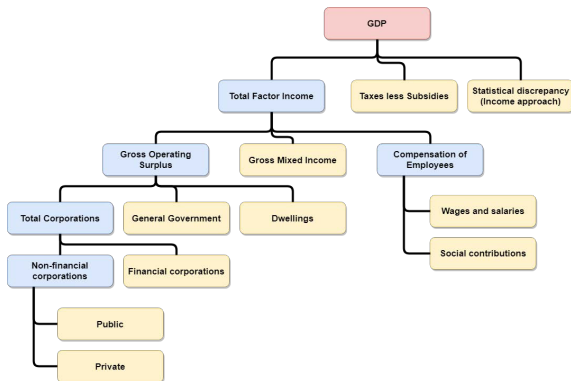
$$Z = AZ + BZ$$

$$Y = AY + BY$$

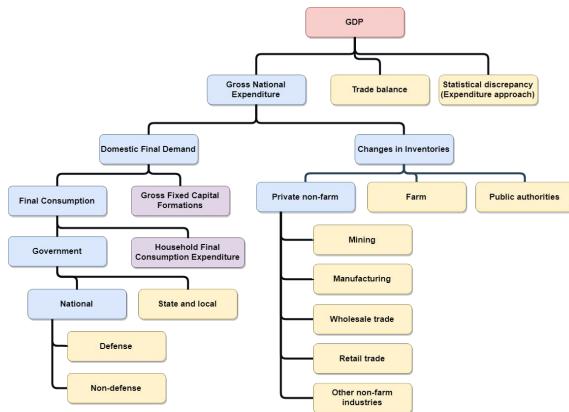
Esempio I: Serie storica vincolata linearmente

Conti Nazionali Australiani (gerarchie di Reddito e Spesa)

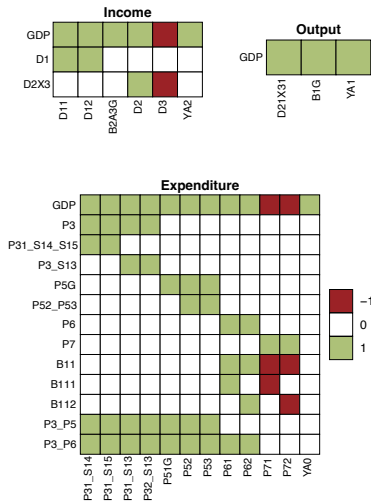
PIL dal lato del Reddito



PIL dal lato della Spesa



Fonte: <https://ec.europa.eu/eurostat/esa2010>



Riconciliazione delle previsioni puntuali

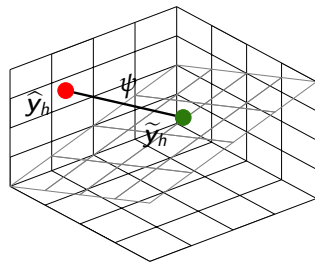
Hyndman *et al.* (2011); Wickramasuriya *et al.* (2019); Panagiotelis *et al.* (2021)

Definizione

La riconciliazione delle previsioni mira ad aggiustare la previsione di base $\hat{\mathbf{x}}_h$ tramite una funzione $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{s}$ tale che

$$\tilde{\mathbf{y}}_h = \psi(\hat{\mathbf{y}}_h),$$

dove $\tilde{\mathbf{y}}_h \in \mathfrak{s}$ è il vettore delle previsioni riconciliate



Dati di input

serie storiche multiple
 $\{\mathbf{y}_t\}_{t=1,\dots,T}$ con

$$\mathbf{C}_{cs}\mathbf{y}_t = \mathbf{0}_{(n_a \times 1)}$$

Previsioni di base a $T+h$

Modelli univariati/multivariati
(ARIMA, VAR, NN, ...):

$$\mathbf{C}_{cs}\hat{\mathbf{y}}_h \neq \mathbf{0}_{(n_a \times 1)}$$

Previsioni riconciliate a $T+h$

Rendere le previsioni di base
coerenti:

$$\mathbf{C}_{cs}\tilde{\mathbf{y}}_h = \mathbf{0}_{(n_a \times 1)}$$

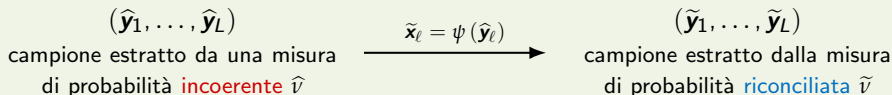
Riconciliazione delle previsioni probabilistiche

Panagiotelis *et al.* (2023)

Definizione

La misura di probabilità riconciliata di $\hat{\nu}$ rispetto a ψ è una misura di probabilità $\tilde{\nu}$ su $\mathcal{S}_{CS}$ con σ -algebra $\mathcal{F}_{\mathcal{S}_{CS}}$ tale che $\tilde{\nu}(\mathcal{A}) = \hat{\nu}(\psi^{-1}(\mathcal{A}))$, $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}_{CS}}$, dove $\psi^{-1}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \psi(\mathbf{x}) \in \mathcal{A}\}$ è la pre-immagine di $\mathcal{A}$

Thm: Campioni Riconciliati Cross-sezionali



- Approccio parametrico (Wickramasuriya, 2024): $\mathcal{N}(\hat{\mathbf{y}}, \Sigma_{CS}) \Rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{M}\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{M}\Sigma_{CS}\mathbf{M}')$
- Approccio non-parametrico (Panagiotelis *et al.*, 2023): **Joint bootstrap**

PIL dell'Area Euro 19 (EA19)

Riconciliazione delle previsioni di 669 serie storiche trimestrali a prezzi correnti, 2000:Q1–2019:Q4

Descrizione

- 19 paesi membri dell'Area Euro: Austria, Belgio, Finlandia, Francia, Germania, Irlanda, Italia, Lussemburgo, Paesi Bassi, Portogallo, Spagna, Grecia, Slovenia, Cipro, Malta, Slovacchia, Estonia, Lettonia, Lituania
- Variabili dei Conti Nazionali
 - *PIL*
 - max 8 aggregati di Reddito
 - max 24 aggregati di Spesa
 - max 3 aggregati di Produzione

Esperimento di previsione

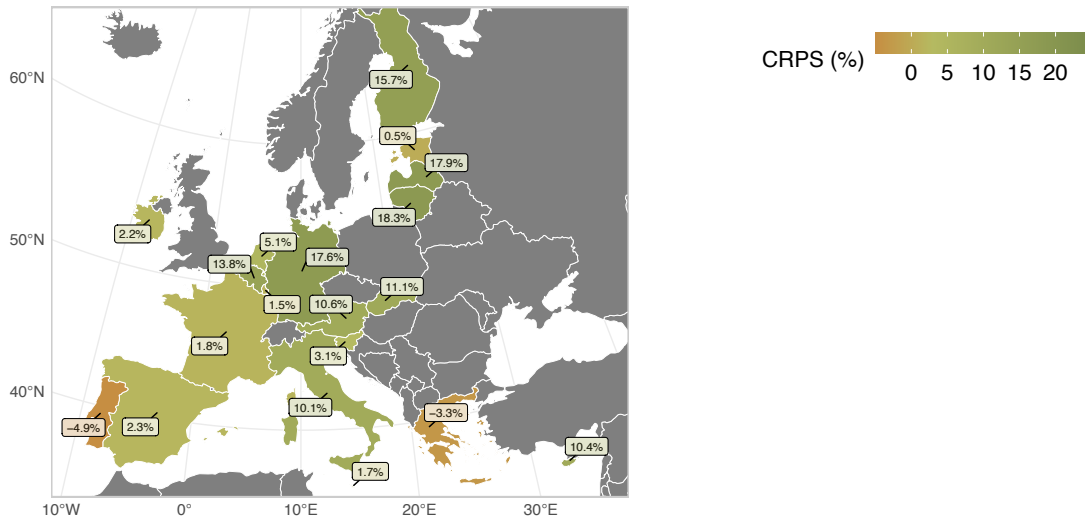
- Previsioni di base ARIMA (finestre espandibili, 40 origini di previsione)
- Orizzonti di previsione $h = 1, \dots, 4$

Indici di accuratezza: CRPS ed ES

Approcci di riconciliazione delle previsioni: ols, wls e shr

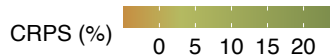
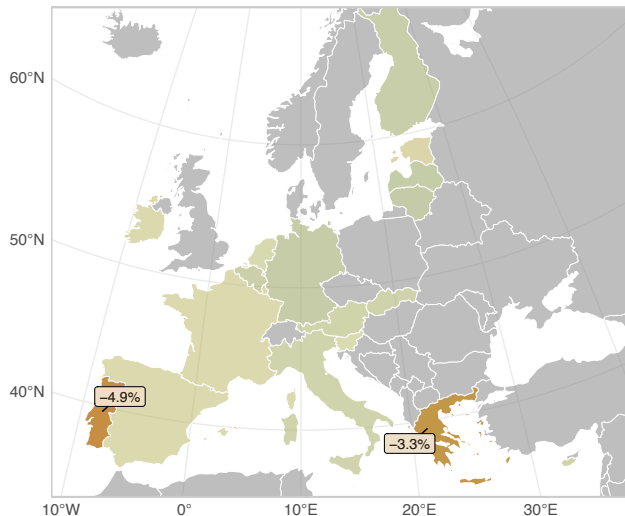
Skill Score (CRPS) per le previsioni del *PIL*

Previsioni probabilistiche riconciliate (wls, joint bootstrap) a un passo in avanti



Skill Score (CRPS) per le previsioni del *PIL*

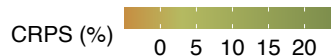
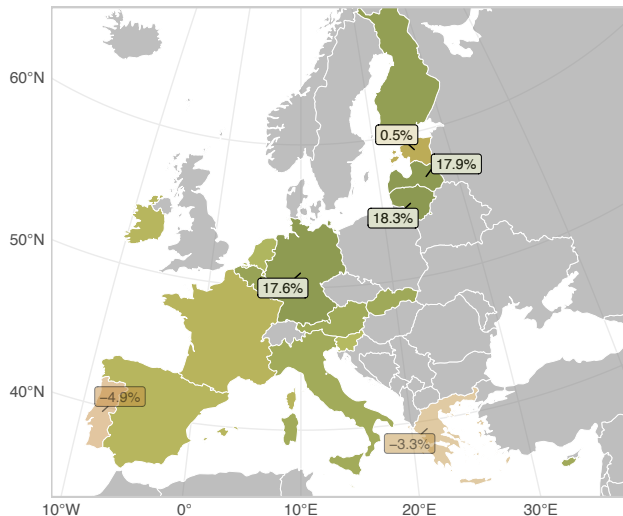
Previsioni probabilistiche riconciliate (wls, joint bootstrap) a un passo in avanti



- Nessun miglioramento per Grecia e Portogallo (-3,3% e -4,9%)

Skill Score (CRPS) per le previsioni del *PIL*

Previsioni probabilistiche riconciliate (wls, joint bootstrap) a un passo in avanti



- Nessun miglioramento per Grecia e Portogallo (-3,3% e -4,9%)
- EA19 +24,2%
- Skill score positivi per 17 paesi
- Range da +0,5% (Estonia) a circa +18% (Germania, Lettonia, Lituania)

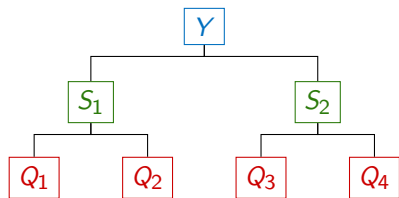
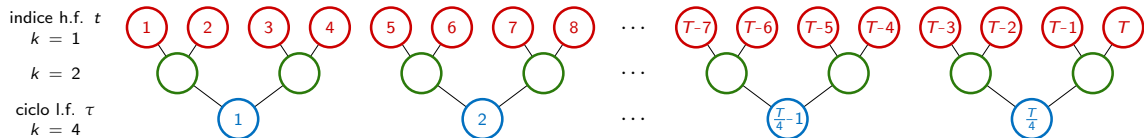
Riconciliazione delle previsioni: questioni metodologiche e applicazioni
Palermo, IT – 27 Gennaio 2027

Estensione ai framework temporali e cross-temporali

Framework temporale

Athanasopoulos *et al.* (2017)

Serie storica trimestrale ($k = 1$) aggregata a semestrale ($k = 2$) e annuale ($k = 4$)



Gerarchia trimestrale:
serie **trimestrali**, **semestrali** e **annuali**

Gerarchia temporale $\rightarrow$ **aggregazione non sovrapposta**
delle osservazioni di una serie storica $y_{i,t}$ a intervalli regolari

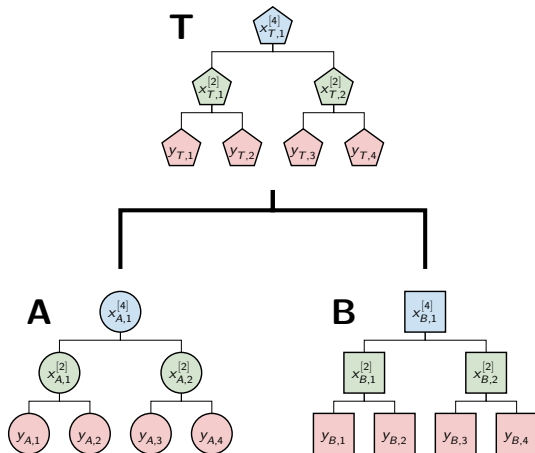
$$x_{i,\tau}^{[k]} = \sum_{t=(\tau-1)k+1}^{\tau k} y_{i,t} \quad \text{per} \quad \tau = 1, \dots, \lfloor T/k \rfloor$$

NB: Per $k = 1$, $\tau = t = 1, \dots, T$ e $x_{i,\tau}^{[1]} = y_{i,t}$

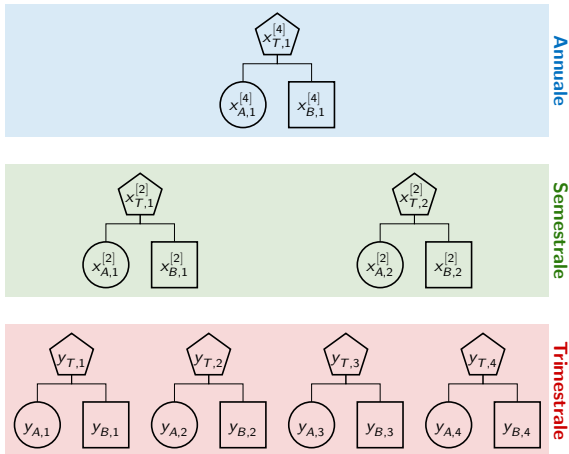
Cross-sezionale + Temporale = Cross-temporale

Una gerarchia cross-temporale di tre serie storiche trimestrali ($T = A + B$)

cross-sezionale $\rightarrow$ temporale



temporale $\rightarrow$ cross-sezionale



Software per la riconciliazione delle previsioni

Pacchetto	Linguaggio	Cross-sezionale	Temporale	Cross-temporale	Probabilistica
hts [Ⓢ]	R	✓			
thief [Ⓢ]	R		✓		
ProbReco [📦]	R	✓			✓
fable [©]	R	✓			✓
bayesRecon [©]	R	✓	✓		✓
FoReco [©]	R	✓	✓	✓	✓
pyhts [Ⓢ]	Python	✓	✓		
hierarchicalforecast [©]	Python	✓			✓



Supportato



Non aggiornato



Archiviato



Disponibile su 

Prima release: 01/10/2020

Ultima release: 20/08/2024

Il pacchetto **FoReco** (**F**orecast **R**econciliation) è progettato per la riconciliazione delle previsioni puntuali e probabilistiche, un **processo post-previsione** finalizzato a migliorare l'accuratezza delle previsioni di base per un sistema di serie storiche vincolate linearmente (es. gerarchiche/raggruppate).

Offre procedure di riconciliazione delle previsioni classiche (bottom-up e top-down) e moderne (combinazione ottimale ed euristica) per serie storiche vincolate linearmente cross-sezionali, temporali e **cross-temporali**.

Link:

 cran.r-project.org/package=FoReco

 github.com/danigiro/FoReco

 danigiro.github.io/FoReco

Riconciliazione delle previsioni: questioni metodologiche e applicazioni
Palermo, IT – 27 Gennaio 2027

Osservazioni conclusive ed estensioni

■ Riconciliazione con machine learning

- Spiliotis, E., Abolghasemi, M., Hyndman, R. J., Petropoulos, F., & Assimakopoulos, V. (2021). Hierarchical forecast reconciliation with machine learning. *Applied Soft Computing*, 112, 107756. DOI:10.1016/j.asoc.2021.107756
- Rombouts, J., Ternes, M., & Wilms, I. (2024). Cross-temporal forecast reconciliation at digital platforms with machine learning. *International Journal of Forecasting*. DOI:10.1016/j.ijforecast.2024.05.008

■ Framework bayesiano

- Corani, G., Azzimonti, D., Augusto, J. P. S. C., & Zaffalon, M. (2021). Probabilistic Reconciliation of Hierarchical Forecast via Bayes' Rule. *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*, 12459, 211–226. DOI:10.1007/978-3-030-67664-3_13
- Corani, G., Azzimonti, D., & Rubattu, N. (2024). Probabilistic reconciliation of count time series. *International Journal of Forecasting*, 40(2), 457–469. DOI:10.1016/j.ijforecast.2023.04.003
- Zambon, L., Azzimonti, D., & Corani, G. (2024). Probabilistic reconciliation of mixed-type hierarchical time series. 40th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI2024)

- Forecast Linear Augmented Projection (FLAP): A free lunch to reduce forecast error variance di Y. F. Yang, G. Athanasopoulos, R. J Hyndman e A. Panagiotelis arXiv:2407.01868

- aumenta i dati costruendo nuove serie che sono combinazioni lineari delle serie originali;
- prevede sia le serie originali che quelle nuove; e
- recupera un nuovo insieme di previsioni per le serie originali tramite proiezioni.

- Coherent forecast combination for linearly constrained multiple time series di D. Girolimetto e T. Di Fonzo, arXiv:2412.03429

Bates and Granger (1969): **combinazione lineare delle previsioni** (*p* esperti, *una* variabile)

+

Stone *et al.* (1942): **aggiustamento multivariato vincolato ai minimi quadrati** (*un* esperto, *n* variabili)

↓

previsioni combinate ottimali e coerenti per serie storiche multiple **vincolate linearmente**
(*p* esperti, *n* variabili)

Conclusione

- La ricerca sulle serie storiche gerarchiche e sulla **riconciliazione delle previsioni** ha avuto un **successo e impatto significativi** sia in ambito accademico che professionale
- Nonostante i sostanziali progressi, rimangono ancora numerose **questioni di ricerca aperte** per il futuro
 - Sviluppare metodi per la **stima della matrice di covarianza** che si adattino a strutture **(molto) grandi**
 - Estendere i metodi di riconciliazione a **diversi domini di dati**, come dati **non negativi**, dati **discreti** (come conteggi) e dati con **storia limitata** o **pattern intermittenti**
 - Acquisire una migliore comprensione delle **proprietà teoriche ed empiriche** della riconciliazione probabilistica, ad es. le **proprietà di copertura** degli intervalli di previsione derivati dalle previsioni riconciliate
 - Esplorare gli **aspetti di teoria dei giochi** della previsione gerarchica, in particolare riguardo all'**allineamento delle decisioni**, al raggiungimento di miglioramenti paretiani attraverso i livelli gerarchici e allo sviluppo di meccanismi di incentivazione affinché gli agenti ai diversi livelli condividano informazioni per la riconciliazione



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PALERMO



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Grazie per l'attenzione!

Daniele Girolimetto

Dipartimento di Scienze Statistiche, Università di Padova

🌐 danigiro.github.io

🔗 github.com/danigiro

@ daniele.girolimetto@unipd.it

Palermo, IT – 27 Gennaio 2026



- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Labys, P. (2003) Modeling and Forecasting Realized Volatility. *Econometrica* **71**(2), 579–625
- Athanasopoulos, G., Hyndman, R. J., Kourentzes, N. and Panagiotelis, A. (2024) Forecast reconciliation: A review. *International Journal of Forecasting* **40**(2), 430–456
- Athanasopoulos, G., Hyndman, R. J., Kourentzes, N. and Petropoulos, F. (2017) Forecasting with temporal hierarchies. *European Journal of Operational Research* **262**(1), 60–74
- Athanasopoulos, G. and Kourentzes, N. (2022) On the evaluation of hierarchical forecasts. *International Journal of Forecasting* **39**(4), 1502–1511
- Bates, J. M. and Granger, C. W. J. (1969) The Combination of Forecasts. *Journal of the Operational Research Society* **20**(4), 451–468
- Caporin, M., Di Fonzo, T. and Girolimetto, D. (2024) Exploiting intraday decompositions in Realized Volatility forecasting: A forecast reconciliation approach. *Journal of Financial Econometrics* **22**(3), 1759–1784
- Di Fonzo, T. and Girolimetto, D. (2023a) Cross-temporal forecast reconciliation: Optimal combination method and heuristic alternatives. *International Journal of Forecasting* **39**(1), 39–57
- Di Fonzo, T. and Girolimetto, D. (2023b) Spatio-temporal reconciliation of solar forecasts. *Solar Energy* **251**, 13–29
- Di Fonzo, T. and Girolimetto, D. (2024) Forecast combination-based forecast reconciliation: Insights and extensions. *International Journal of Forecasting* **40**(2), 490–514

- Girolimetto, D., Athanasopoulos, G., Di Fonzo, T. and Hyndman, R. J. (2024) Cross-temporal probabilistic forecast reconciliation: Methodological and practical issues. *International Journal of Forecasting* **40**(3), 1134–1151
- Girolimetto, D. and Di Fonzo, T. (2023) Point and probabilistic forecast reconciliation for general linearly constrained multiple time series. *Statistical Methods & Applications* **33**, 581–607
- Hollyman, R., Petropoulos, F. and Tipping, M. E. (2021) Understanding forecast reconciliation. *European Journal of Operational Research* **294**(1), 149–160
- Hyndman, R. J., Ahmed, R. A., Athanasopoulos, G. and Shang, H. L. (2011) Optimal combination forecasts for hierarchical time series. *Computational Statistics & Data Analysis* **55**(9), 2579–2589
- Hyndman, R. J., Lee, A. J. and Wang, E. (2016) Fast computation of reconciled forecasts for hierarchical and grouped time series. *Computational Statistics & Data Analysis* **97**, 16–32
- Panagiotelis, A., Athanasopoulos, G., Gamakumara, P. and Hyndman, R. J. (2021) Forecast reconciliation: A geometric view with new insights on bias correction. *International Journal of Forecasting* **37**(1), 343–359
- Panagiotelis, A., Gamakumara, P., Athanasopoulos, G. and Hyndman, R. J. (2023) Probabilistic forecast reconciliation: Properties, evaluation and score optimisation. *European Journal of Operational Research* **306**(2), 693–706
- Stone, R., Champernowne, D. G. and Meade, J. E. (1942) The Precision of National Income Estimates. *The Review of Economic Studies* **9**(2), 111
- Wickramasuriya, S. L. (2024) Probabilistic Forecast Reconciliation under the Gaussian Framework. *Journal of Business & Economic Statistics* **42**(1), 272–285

Wickramasuriya, S. L., Athanasopoulos, G. and Hyndman, R. J. (2019) Optimal Forecast Reconciliation for Hierarchical and Grouped Time Series Through Trace Minimization. *Journal of the American Statistical Association* **114**(526), 804–819